



Fachbereich 13
Institut für Theoretische Physik
Goethe-Universität Frankfurt am Main

Exzentrizitäten im Anfangszustand von Schwerionenkollisionen deformierter Kerne

**Abschlussarbeit zur Erlangung des akademischen Grades
Bachelor of Science in Physik**

vorgelegt von Lukas Prinz, geb. am 23.08.1997 in Gelnhausen
Matrikelnummer: 6333140

Erstgutachterin: Prof. Dr. Hannah Elfner
Zweitgutachterin: Anna Schäfer

Eingereicht am 30. September 2019

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
1.1	Das Standardmodell der Teilchenphysik und die starke Wechselwirkung	3
1.2	Schwerionenkollisionen und Exzentrizitäten	5
1.3	Struktur dieser Arbeit	6
2	Theoretische Grundlagen	8
2.1	Vorbemerkungen	8
2.2	Terminologie und Kenngrößen von Schwerionenkollisionen	8
2.3	Exzentrizitäten	9
2.4	Transporttheorie	10
3	Modellbeschreibung	12
3.1	Kollisionskriterium	12
3.2	Initialisierung einer Schwerionenkollision	13
4	Methodik	17
4.1	Zeitpunkt der Berechnung der Exzentrizitäten	17
4.2	Durchführung und Auswertung der Simulationen	21
4.3	Limitierungen	22
5	Ergebnisse	24
5.1	Orientierung	24
5.2	Deformation	26
5.3	Fermi-Impulse	29
5.4	Isobare	29
6	Zusammenfassung und Ausblick	33
	Literaturverzeichnis	34
A	Anhang	36
A.1	Schwerpunktsenergie	36
A.2	Fermi-Impulse	36
A.3	Statistische Größen	37
B	Danksagungen	38
C	Eigenständigkeitserklärung	39

1 Einleitung

Nach aktuellen Vorstellungen existieren in der Natur vier fundamentale Wechselwirkungen. Die starke, die elektromagnetische, die schwache Wechselwirkung sowie die Gravitation. Die Gravitation ist um viele Größenordnungen schwächer als die anderen drei Wechselwirkungen, weshalb sie in der Teilchenphysik, die sich mit den kleinsten Bestandteilen der Materie befasst, komplett vernachlässigbar ist. Die Herausforderung der Teilchenphysik besteht folglich darin, Materie als Zusammensetzung aus Elementarteilchen zu verstehen sowie die Eigenschaften und das Zusammenspiel dieser Teilchen durch die starke, die elektromagnetische und die schwache Wechselwirkung zu beschreiben. Ein großer Erfolg war dabei die Entwicklung einer Quantenfeldtheorie, dem Standardmodell der Teilchenphysik, das in seinen Grundzügen im Folgenden vorgestellt wird.

1.1 Das Standardmodell der Teilchenphysik und die starke Wechselwirkung

Eine intrinsische Eigenschaft von Teilchen ist der Spin, der entweder halb- oder ganzzahlige Werte in Einheiten des reduzierten Planckschen Wirkungsquantums \hbar annehmen kann. Bei halbzahligem Spin spricht man von Fermionen und Teilchen mit ganzzahligem Spin heißen Bosonen. Das Standardmodell besagt, dass Materie aus fermionischen Elementarteilchen aufgebaut ist und dass die starke, elektromagnetische und schwache Wechselwirkung durch den Austausch von Bosonen zwischen den Konstituenten der Materie vermittelt wird.

In Abbildung 1 sind die Elementarteilchen des Standardmodells aufgelistet. Es gibt sechs Quarks, sechs sogenannte Leptonen und fünf Bosonen. Die Quarks und ihre entsprechenden Anti-Quarks sind die Bausteine von Hadronen wie beispielsweise dem Proton, das aus zwei up-Quarks und einem down-Quark besteht. Hadronen, die aus genau drei Quarks zusammengesetzt sind, werden als Baryonen bezeichnet, während ein Quark und ein Anti-Quark zusammen ein Meson bilden.

Die Theorie des Standardmodells, die sich der starken Wechselwirkung widmet, heißt Quantenchromodynamik (QCD). Diese Bezeichnung geht darauf zurück, dass jedem Quark eine sogenannte Farbladung, die den Wert rot, grün oder blau annehmen kann, zugeschrieben wird. Anti-Quarks treten analog dazu in anti-rot, anti-grün oder anti-blau auf. Dass nun gerade Baryonen und Mesonen in

Drei Familien von Materieteilchen (Fermionen)						Higgsboson			
Spin Ladung Masse	Quarks	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\begin{matrix} 0 & & 0 \\ & H & \\ 126 \text{ GeV} & & \end{matrix}$	
		u	c	t	2.2 MeV	1.3 GeV	173 GeV		
		d	s	b	4.8 MeV	95 MeV	4.2 GeV		
	Leptonen	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0		
		ν_e	ν_μ	ν_τ	$< 2 \text{ eV}$	$< 0.2 \text{ MeV}$	$< 20 \text{ MeV}$		
		e	μ	τ	0.51 MeV	95 MeV	1.8 GeV		
$\frac{1}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$	-1				
Austauschteilchen: Eichbosonen									
	1	0	1	0	1	± 1	0	1	0
	γ	g	W^\pm	Z	0	80 GeV	91 GeV		

Abbildung 1: Die Elementarteilchen des Standardmodells und ihre Eigenschaften; Abbildung entnommen aus [1]

der Natur vorkommen, ist auf das Konzept des Farbeinschlusses (engl. *confinement*) zurückzuführen. Dieses besagt, dass Quarks nur derart zusammengefügt werden können, dass sich ihre Farben in der Summe gegenseitig aufheben, also rot + grün + blau oder Farbe + entsprechende Antifarbe. Die Austauschteilchen der starken Wechselwirkung sind die Gluonen. Sie tragen selbst auch Farbladung und können als Folge dessen nicht nur mit Quarks, sondern auch mit sich selbst wechselwirken.

Die Kopplungskonstante α_s , die die Stärke der starken Wechselwirkung beschreibt, ist trotz ihrer Bezeichnung nicht konstant, sondern nimmt für steigende Energien ab. Dieses Phänomen ist unter der Bezeichnung „asymptotische Freiheit“ bekannt. Bei hohen Energien ist die Wechselwirkung schwach genug, dass der Farbeinschluss größtenteils aufgehoben wird und Quarks und Gluonen die dominierenden Freiheitsgrade des Systems sind. Dieser heiße dichte Zustand wird als Quark-Gluon-Plasma (QGP) bezeichnet. Es wird vermutet, dass das Universum bis circa $10 \mu\text{s}$ nach dem Urknall eine ausreichend hohe Temperatur hatte, um ein QGP entstehen zu lassen [2].

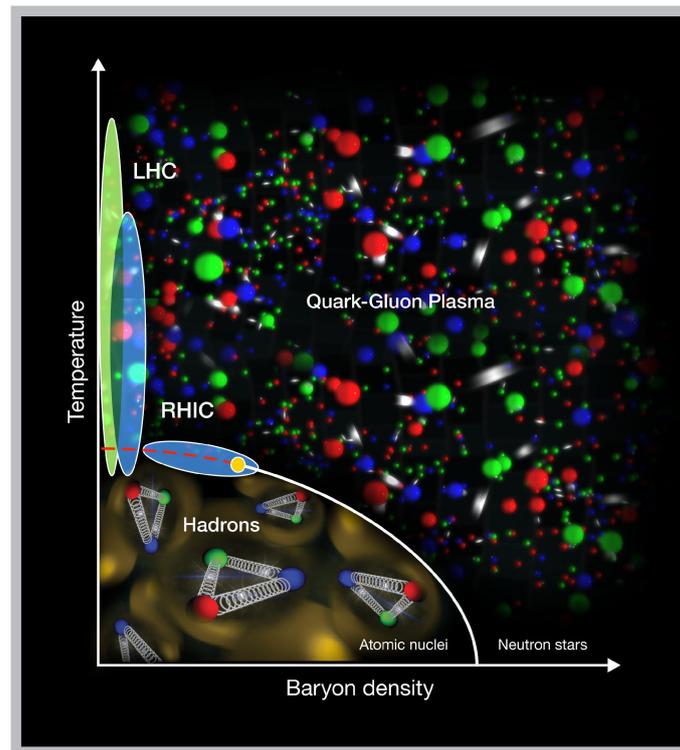


Abbildung 2: Schematische Darstellung des QCD-Phasendiagramms; Abbildung entnommen aus [3]

In Abbildung 2 ist das Phasendiagramm stark wechselwirkender Materie skizziert. Unten links ist der hadronische Zustand der Materie dargestellt, in der Quarks nur in gebundener Form vorliegen. Jenseits dieser Phase liegt das QGP, das durch eine Erhöhung der Dichte bzw. der Temperatur erzeugt werden kann. Es ist Gegenstand aktueller Forschung, die starke Wechselwirkung und damit auch das QCD-Phasendiagramm besser zu verstehen.

1.2 Schwerionenkollisionen und Exzentrizitäten

In der hadronischen Phase werden Hadronen durch die starke Wechselwirkung zusammengehalten, darüber hinaus ist diese aber nicht sichtbar. Um die starke Wechselwirkung studieren zu können, werden enorme Energien benötigt, da nur so der Farbeinschluss aufgebrochen werden kann. Relativistische Schwerionenkollisionen, also Zusammenstöße von stark beschleunigten Atomkernen, haben sich hierfür vielfach bewährt. Sie werden an großen Teilchenbeschleunigern wie dem Relativistic Heavy Ion Collider (RHIC) in Brookhaven [4] oder dem Large Hadron Collider (LHC) nahe Genf [5] durchgeführt. Ein Experiment allein trägt jedoch nicht zu einem erweiterten Verständnis bei. Es ist eine zugrundeliegende Theorie notwendig, deren Gültigkeit durch Vergleich mit den experimentellen Befunden überprüft werden kann. Eine solche Theorie liegt zwar in Form der

QCD prinzipiell vor, sie ist jedoch im Allgemeinen nicht analytisch lösbar. Daher ist man in diesem Bereich in besonderer Weise auf effektive Modelle angewiesen [6].

Zur Simulation von Schwerionenkollisionen wird für diese Arbeit ein relativistisches hadronisches Transportmodell namens SMASH (Simulating Many Accelerated Strongly-interacting Hadrons) verwendet. Als Transportmodell besitzt es den Vorteil, dass zu jedem Zeitpunkt die gesamte Phasenrauminformation des betrachteten Systems vorliegt [6]. Insofern liefert SMASH eine Beschreibung des Systems, die über die Menge aller zugänglichen Messdaten hinausgeht. Auf diese Weise lassen sich auch physikalische Größen analysieren, die experimentell nicht messbar sind, aber die Observablen wesentlich beeinflussen. Solche Größen sind beispielsweise die sogenannten Exzentrizitäten, die die Form der Überlappregion zweier kollidierender Kerne quantifizieren. Ist diese anisotrop, liegen im erzeugten Medium richtungsabhängige Druckgradienten vor. Da die Energiedichte im Zentrum der Kollision enorm groß ist, können viele neue Teilchen erzeugt werden. Sie werden bevorzugt in solche Richtungen emittiert, in denen der Druckgradient vergleichsweise groß ist. Ein anisotroper Überlapp, der nicht direkt beobachtet werden kann, übersetzt sich auf diese Weise in eine anisotrope Impulsverteilung, den *flow*, der experimentell messbar ist. Der Übergang von den Exzentrizitäten zum *flow* ist abhängig von den Eigenschaften des in der Kollision entstandenen Mediums [7], was die Bestimmung von Exzentrizitäten motiviert.

Aus Experimenten ist bekannt, dass viele Kerne nicht sphärisch symmetrisch, sondern deformiert sind [8]. Kollisionen deformierter Kerne erzeugen Überlappregionen, die sich in ihren Formen stark von denen, die durch kugelförmige Kerne entstehen können, unterscheiden. Daraus ergeben sich weitere Gelegenheiten, *flow* zu untersuchen. Voraussetzung für eine sinnvolle Auswertung der Messdaten ist jedoch die Kenntnis der Exzentrizitäten. Aus diesem Grund werden in der vorliegenden Arbeit die Exzentrizitäten in Kollisionen von deformierten Kernen berechnet und ihre Abhängigkeiten von verschiedenen Parametern des Systems untersucht.

1.3 Struktur dieser Arbeit

Nach der vorangegangenen Motivation des Forschungsthemas werden in Abschnitt 2 zunächst einige wichtige Begriffe und notwendige Größen zur Beschreibung von Schwerionenkollisionen eingeführt, gefolgt von den Definitionen von Exzentrizitäten. Es schließt sich eine kurze Vorstellung der Transporttheorie an.

Diese stellt die Grundlage des verwendeten Modells SMASH dar. Eine Erläuterung der für die betrachtete Forschungsfrage relevanten Aspekte von SMASH findet in Kapitel 3 statt. In Abschnitt 4 wird als erstes die Frage nach dem Zeitpunkt der Berechnung der Exzentrizitäten beantwortet, bevor die Durchführung und Auswertung der Simulationen beschrieben und die Methodik kritisch betrachtet wird. In Abschnitt 5 werden die Resultate vorgestellt und detailliert diskutiert. Im abschließenden Kapitel 6 werden die gewonnenen Erkenntnisse zusammengefasst und es wird ein Ausblick auf notwendige zukünftige Arbeiten gegeben.

2 Theoretische Grundlagen

2.1 Vorbemerkungen

Es ist zweckmäßig, für alle Rechnungen im Rahmen dieser Arbeit zu natürlichen Einheiten zu wechseln. Die Einheiten werden also derart gewählt, dass die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum exakt eins ist, $c = 1$. Darüber hinaus wird $\hbar = 1$ gesetzt. Diese Wahl der Einheiten hat zur Folge, dass etwa Zeiten dieselben Einheiten wie Längen besitzen und dass sich Massen in Energieeinheiten angeben lassen.

Zur vereinfachten Darstellung mathematischer Ausdrücke wird die Einsteinsche Summenkonvention verwendet, nach der über gleiche kontra- und kovariante griechische Indizes jeweils von null bis drei summiert wird.

Es wird stets ausgenutzt, dass sich die Massen von Protonen und Neutronen kaum unterscheiden, $m_p \approx m_n \approx 0,939 \text{ GeV}$ [9]. Sie können folglich gemeinsam als Nukleonmasse $m_N \approx 0,939 \text{ GeV}$ bezeichnet werden.

2.2 Terminologie und Kenngrößen von Schwerionenkollisionen

Unter Schwerionen versteht man in der Physik alle Atomkerne, die schwerer als Helium sind [10]. In Schwerionenkollisionen, bei denen zwei Schwerionen auf hohe Geschwindigkeiten beschleunigt und zur Kollision gebracht werden, bezeichnet man einen der Kerne als Target und den anderen als Projektil. Diese Bezeichnungen suggerieren, dass das Target ruht und das Projektil auf das Target geschossen wird (*fixed-target frame*). Dies ist jedoch im Allgemeinen nicht korrekt, da die Kollision natürlich in beliebigen Bezugssystemen beschrieben werden kann, sodass nicht zwangsläufig einer der Kerne ruht. Zur Unterscheidung der zwei beteiligten Kerne werden dennoch im Folgenden die zunächst willkürlich festgelegten Bezeichnungen „Target“ und „Projektil“ verwendet.

Bevor es zur eigentlichen Kollision kommt, bewegen sich die Mittelpunkte der beiden Kerne entlang zweier gedachter paralleler Geraden aufeinander zu. Der Abstand dieser Geraden wird also Stoßparameter b bezeichnet. Ist b klein gegenüber der Ausdehnung der Kerne, spricht man von einer zentralen Kollision, große Stoßparameter entsprechen hingegen peripheren Kollisionen. In solchen gibt es mit hoher Wahrscheinlichkeit Teilchen, die keine Wechselwirkung erfahren. Sie werden Spektatoren genannt. Alle anderen Teilchen heißen Partizipanten, denn sie waren entweder an mindestens einer Interaktion beteiligt oder wurden erst während der Kollision erzeugt.

Eine wichtige Information zur Beschreibung von Schwerionenkollisionen ist die Energie der Kerne, welche sich aus den den Ruhemassen äquivalenten Energien und den kinetischen Energien zusammensetzt. Die kinetische Energie eines Teilchens hängt unter anderem von seinem Impuls und damit auch vom Bezugssystem ab. Die bei Schwerionenkollisionen auftretenden Teilchengeschwindigkeiten sind oft beachtliche Bruchteile der Vakuumlichtgeschwindigkeit [10], woraus folgt, dass die theoretische Beschreibung den Anforderungen der speziellen Relativitätstheorie genügen muss. Folglich eignet sich ein Lorentz-Skalar zur Charakterisierung der Kollisionsenergie besonders gut. Etabliert hat sich dafür die Mandelstam-Variable s und die daraus abgeleitete Schwerpunktsenergie pro Nukleonpaar $\sqrt{s_{NN}}$, siehe Anhang A.1.

2.3 Exzentrizitäten

Exzentrizitäten charakterisieren den Überlapp zweier Kerne in einer Schwerionenkollision. Es ist Konvention, dass die Strahlachse mit der z -Achse eines kartesischen Koordinatensystems zusammenfällt und dass der Stoßparameter durch eine Verschiebung der Kerne entlang der x -Achse realisiert wird. Die y -Achse wird so gewählt, dass sich die Mittelpunkte der Kerne vor der Kollision stets in der Ebene $y = 0$ befinden. Davon ausgehend wird die sogenannte *reaction plane eccentricity* ϵ_{rp} definiert als

$$\epsilon_{rp} = \frac{\sigma_y^2 - \sigma_x^2}{\sigma_y^2 + \sigma_x^2} \quad (1)$$

mit $\sigma_x^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$ und $\sigma_y^2 = \langle y^2 \rangle - \langle y \rangle^2$. Dabei bezeichnet $\langle \cdot \rangle$ die arithmetische Mittelung über alle Partizipanten in einer Kollision [11]. Es wird also vorausgesetzt, dass mindestens ein Partizipant existiert. Falls jedoch nur einer vorliegt, verschwinden σ_x^2 und σ_y^2 und der Nenner wird null. Es werden folglich mindestens zwei Partizipanten benötigt, ansonsten kann keine Exzentrizität definiert werden.

Die Größen σ_x^2 und σ_y^2 sind die Varianzen der x - und y -Koordinaten der Partizipanten und eine große Varianz entspricht einer breiten Streuung der einzelnen Werte um den gemeinsamen Mittelwert. Man erkennt, dass $\epsilon_{rp} > 0$ bzw. < 0 , falls die Streuung der Teilchenkoordinaten in y -Richtung größer bzw. kleiner als in x -Richtung ist. $\epsilon_{rp} = 0$ würde eine ausgeglichene Verteilung in x - und y -Richtung bedeuten.

Eine alternative Definition ist durch die *participant eccentricity* ϵ_{part} gegeben,

$$\epsilon_{\text{part}} = \frac{\sqrt{(\sigma_y^2 - \sigma_x^2)^2 + 4\sigma_{xy}^2}}{\sigma_y^2 + \sigma_x^2}, \quad (2)$$

wobei $\sigma_{xy} = \langle xy \rangle - \langle x \rangle \langle y \rangle$ die Kovarianz zwischen x und y darstellt [11].

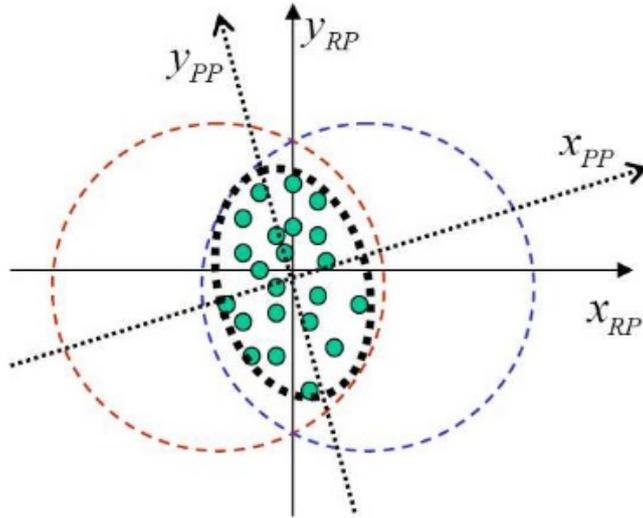


Abbildung 3: Zum Unterschied von *reaction plane eccentricity* und *participant eccentricity*; Abbildung entnommen aus [12]

Der Unterschied zwischen beiden Definitionen wird anhand von Abbildung 3 deutlich. Die *reaction plane eccentricity* ist fest an das zugrundegelegte Koordinatensystem, in der Skizze mit RP gekennzeichnet, gekoppelt. Für die *participant eccentricity* wird anschaulich das Koordinatensystem in ein neues System PP gedreht, sodass die Exzentrizität maximal wird. Die *participant eccentricity* löst sich also gewissermaßen vom zugrundegelegten Koordinatensystem und berücksichtigt die tatsächliche Form der Überlappzone, in der sich die Partizipanten befinden, was auch die Bezeichnung *participant eccentricity* erklärt. Liegen alle Partizipanten auf einer Parallelen zu einer der ursprünglichen Koordinatenachsen, ist die Exzentrizität bereits maximal und es muss keine Drehung erfolgen. Es gilt dann $\sigma_{xy} = 0$, sodass beide Definitionen (u. U. bis auf ein globales Vorzeichen) dasselbe Ergebnis liefern.

2.4 Transporttheorie

Die Transporttheorie bildet die Grundlage für das Modell SMASH, das in Kapitel 3 vorgestellt wird. Sie ist eine statistische Theorie, die die Bewegung von

Teilchen im Phasenraum beschreibt und für die Untersuchung von Nicht-Gleichgewichtsprozessen benötigt wird. Der Transporttheorie liegt die Annahme zugrunde, dass die Wechselwirkungen der betrachteten Teilchen Reichweiten besitzen, die klein gegenüber dem mittleren Abstand der Teilchen sind. Unter diesem Umstand geschehen die Interaktionen nahezu instantan, sodass die gesamte Bewegung der Teilchen in die Propagation, evtl. unter Berücksichtigung externer Felder, und die Stöße untereinander separiert werden kann [13]. Besitzt ein Medium beispielsweise eine hohe Dichte, ist diese Aufteilung nicht gerechtfertigt und die Transporttheorie muss durch die makroskopische Hydrodynamik abgelöst werden.

Die zentrale Größe der Transporttheorie ist die Verteilungsfunktion $f(x, p)$, die proportional zur mittleren Anzahl von Teilchen im Phasenraumvolumen $d^3x d^3p$ ist [13]. Dabei bezeichnet x den 4-Ortsvektor und p den 4-Impuls. Liegen mehrere Teilchenarten i vor, so ist die relativistische Bewegungsgleichung jeder Verteilungsfunktion f_i durch die relativistische Boltzmann-Gleichung gegeben,

$$p^\mu \frac{\partial f_i(x, p)}{\partial x^\mu} + m_i F^\alpha \frac{\partial f_i(x, p)}{\partial p^\alpha} = C_i^{\text{coll}} \quad . \quad (3)$$

Dabei ist m_i die Masse eines Vertreters der Teilchenspezies i und F die wirkende 4-Kraft [6]. Auf der rechten Seite von Gleichung (3) steht der Kollisionsterm C_i^{coll} , der die Interaktionen der Teilchen berücksichtigt und in den etwa die entsprechenden Wirkungsquerschnitte eingehen.

3 Modellbeschreibung

SMASH ist ein C++-basiertes relativistisches hadronisches Transportmodell, um stark wechselwirkende Materie auf mikroskopischer Ebene effektiv zu beschreiben. SMASH löst die relativistische Boltzmann-Gleichung (3) unter Berücksichtigung von Prozessen der starken Wechselwirkung.

Es sind zum aktuellen Zeitpunkt vier verschiedene Modi implementiert. Im Rahmen dieser Bachelorarbeit wurde ausschließlich der sogenannte Collider-Modus verwendet, in welchem Schwerionenkollisionen simuliert werden können. Der Collider-Modus setzt die Wahl eines Bezugssystems voraus, in dem die Kollision berechnet wird. Im Rahmen dieses Bachelorprojekts werden ausschließlich Kollisionen gleicher Kerne untersucht. Es wird das Schwerpunktsystem gewählt, da es die Symmetrie dieser Systeme beibehält und gleichzeitig den Vorteil mit sich bringt, dass die Energie in diesem Bezugssystem mit dem Lorentz-Skalar $\sqrt{s_{NN}}$ zusammenfällt.

3.1 Kollisionskriterium

Der Kollisionsterm in der relativistischen Boltzmann-Gleichung (3) enthält die Eigenschaften aller berücksichtigten Stoßprozesse. Daher muss definiert werden, unter welchen Bedingungen zwei Teilchen miteinander wechselwirken. In SMASH wird zum Zeitpunkt, zu dem diese Arbeit verfasst wird, ein geometrisches Kollisionskriterium verwendet. Für diesen Zweck werden alle Teilchen als punktförmig betrachtet [6]. Eine Kollision zwischen zwei Teilchen a und b findet statt, falls

$$d_{\text{trans}} < \sqrt{\frac{\sigma_{\text{tot}}}{\pi}} . \quad (4)$$

Dabei ist σ_{tot} der totale Wirkungsquerschnitt für die Interaktion der beiden Teilchen und d_{trans} ihr transversaler Abstand, gegeben durch

$$d_{\text{trans}}^2 = (\vec{r}_a - \vec{r}_b)^2 - \frac{((\vec{r}_a - \vec{r}_b) \cdot (\vec{p}_a - \vec{p}_b))^2}{(\vec{p}_a - \vec{p}_b)^2} , \quad (5)$$

wobei die Orts- und Impulsvektoren \vec{r}_i und \vec{p}_i , $i = a, b$, im Schwerpunktsystem der Zwei-Teilchen-Kollision auszuwerten sind [6].

Es sei noch angemerkt, dass die beteiligten Teilchen bei der Bestimmung des totalen Wirkungsquerschnitts σ_{tot} nicht als punktförmig angesehen werden dürfen, da die räumliche Ausdehnung der Teilchen für ihre Wechselwirkungen nicht vernachlässigbar ist. Der Kollisionsterm der Boltzmann-Gleichung berücksichtigt demnach die Größe der Teilchen, während die Verteilungsfunktion im Pha-

senraum die Teilchen lokalisiert als δ -Distributionen darstellt.

SMASH prüft mithilfe eines dynamischen Verfahrens, für welche Teilchen und zu welcher Zeit das Kollisionskriterium erfüllt ist. Die Wechselwirkung wird dann dadurch simuliert, dass die einfallenden Teilchen durch diejenigen, die aus der Interaktion hervorgehen, ersetzt werden.

3.2 Initialisierung einer Schwerionenkollision

Bevor eine Simulation einer Schwerionenkollision beginnen kann, müssen die Koordinaten und Impulse aller Nukleonen zum Anfangszeitpunkt vorgegeben werden. Die Nukleonen werden zunächst so verteilt, dass sich die Kerne im Ursprung des gewählten Koordinatensystems befinden, und anschließend mit Impulsen versehen. Erst dann werden die Kerne an ihre angedachten Positionen verschoben. Diese Schritte werden im Folgenden detailliert erläutert.

Für die folgenden Betrachtungen ist es zweckmäßig, sich die Nukleonen nicht mehr als Punktteilchen vorzustellen, sondern zum realistischen Bild eines diffusen Objekts zu wechseln, sodass eine stetige Funktion für die Teilchendichte der Nukleonen im Ortsraum überhaupt erst sinnvoll wird. Für diese Funktion $\frac{dN}{d^3r}$ wird dann eine Woods-Saxon-Verteilung in Kugelkoordinaten (r, θ, φ) verwendet [6],

$$\frac{dN}{d^3r}(r, \theta, \varphi) = \frac{\rho_0}{\exp\left(\frac{r-r(\theta, \varphi)}{d}\right) + 1} . \quad (6)$$

θ ist der Polar- und φ der Azimuthalwinkel. Die *diffusiveness* d bestimmt, wie schnell die Nukleonendichte mit zunehmendem Abstand r vom Mittelpunkt des Kerns abfällt. Für $d \rightarrow 0$ ergibt sich ein scharf begrenzter Kern [6]. Die Konstante ρ_0 wird durch die Normierungsbedingung

$$\int_{\mathbb{R}^3} d^3r \frac{dN}{d^3r} = A \quad (7)$$

bestimmt. Die Funktion $r(\theta, \varphi)$ kann als Reihe von Kugelflächenfunktionen Y_{lm} geschrieben werden, da diese ein vollständiges Funktionensystem auf der Einheitskugel bilden [14]. Die explizite Form von $r(\theta, \varphi)$ lautet

$$r(\theta, \varphi) = r_0 \left(1 + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \beta_{lm} Y_{lm}(\theta, \varphi) \right) . \quad (8)$$

Die Koeffizienten β_{lm} werden als Deformationsparameter bezeichnet [6]. Sind sie alle gleich null, verschwindet die Winkelabhängigkeit der Verteilung (6) und

es liegt ein kugelförmiger Kern mit Radius r_0 vor.

Es ist üblich, die Reihe in Gleichung (8) folgendermaßen abzurechnen,

$$r(\theta, \varphi) = r_0 (1 + \beta_{20} Y_{20}(\theta, \varphi) + \beta_{40} Y_{40}(\theta, \varphi)) \equiv r(\theta) \quad . \quad (9)$$

Da $\beta_{lm} = 0$ für alle $m \neq 0$, ist die Nukleonverteilung wegen der Proportionalität $Y_{lm}(\theta, \varphi) \sim e^{im\varphi}$ [14] unabhängig von φ , sodass alle Kerne eine azimuthale Symmetrie aufweisen [6]. Aufgrund der Tatsache, dass θ in Y_{20} und Y_{40} nur in Form von geraden Potenzen von $\cos(\theta)$ auftaucht [14], sind alle Kerne zudem symmetrisch um $\theta = \pi/2$.

Um die Positionen der Nukleonen zu initialisieren, werden sie in SMASH prinzipiell zufällig aber unter Berücksichtigung der Woods-Saxon-Verteilung (6) im Ortsraum platziert. Für jeden Kern ist dabei die Kenntnis von r_0 , d , β_{20} und β_{40} nötig. In dieser Arbeit werden Kollisionen von Kupfer-, Zirconium-, Ruthenium-, Gold- und Uran-Kernen betrachtet. Die dafür in SMASH verwendeten Parameter sind in Tabelle 1 aufgelistet.

Kern	r_0 [fm]	d [fm]	β_{20}	β_{40}
^{63}Cu	4,20641	0,5977	0,162	-0,006
^{96}Zr	5,02	0,46	0	0
^{96}Ru	5,085	0,46	0,158	0
^{197}Au	6,38	0,535	-0,131	-0,031
^{238}U	6,86	0,556	0,28	0,093

Tabelle 1: Kernradius r_0 , *diffusiveness* d und Deformationsparameter β_{20} und β_{40} für Cu-, Zr-, Ru-, Au- und U-Kerne; Werte entnommen aus [15]

In Grafik 4 ist zur Veranschaulichung exemplarisch die Woods-Saxon-Verteilung (6) für einen Zirconium-Kern aufgetragen. Da nach Tabelle 1 $\beta_{20} = \beta_{40} = 0$, ist der Kern kugelförmig, sodass die Teilchendichte nur vom radialen Abstand r abhängt. Man erkennt, dass die Nukleonendichte bis etwa $r = 3$ fm nahezu konstant ist und dann zwischen 3 fm und 7 fm stark abnimmt. Für $r \rightarrow \infty$ nähert sie sich asymptotisch dem Wert null an.

Da deformierte Kerne nicht invariant unter Rotationen sind, müssen sie gedreht werden können, um eine möglichst allgemeine Initialisierung zu gewährleisten. Man führt dazu ein neues Koordinatensystem (x', y', z') ein, das fest mit dem zu rotierenden Kern verbunden ist und vor den Rotationen mit dem bisherigen Koordinatensystem (x, y, z) zusammenfällt. Zuerst wird eine Rotation um den Winkel ϕ um die z' -Achse ausgeführt, wodurch sich auch die x' -Achse dreht,

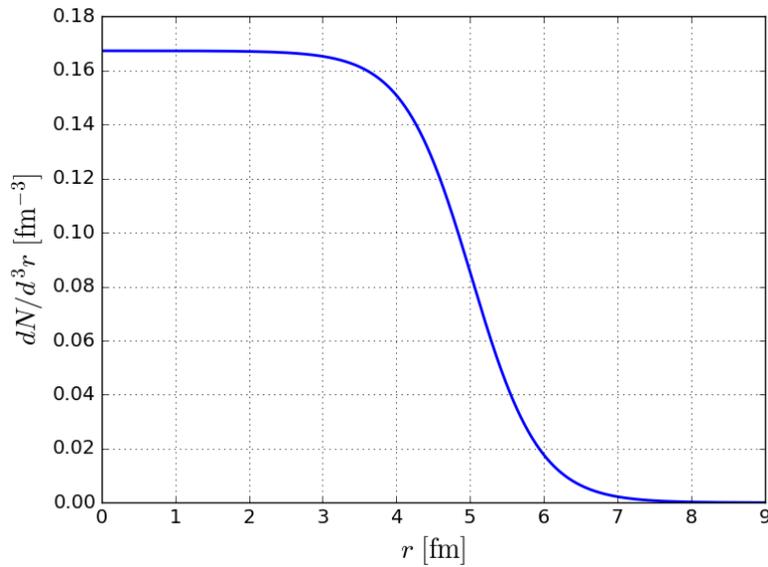


Abbildung 4: Nukleonendichte eines Zirconium-Kerns

dann folgt eine Drehung um den Winkel ϑ um die rotierte x' -Achse [15]. Die Euler-Winkel ϕ und ϑ können entweder explizit angegeben oder in jeder Kollision zufällig generiert werden. Für die meisten Ergebnisse in dieser Arbeit wird eine zufällige Rotation verwendet, da dies den experimentell realistischen Fall darstellt. Die Orientierung der Kerne ist praktisch bisher nicht kontrollierbar.

Die Festlegung der Energie der Kollision ordnet allen Nukleonen des Projektils bzw. Targets einen Impuls \vec{p} bzw. $-\vec{p}$ parallel zur Strahlachse zu, die per Festlegung mit der z -Achse zusammenfällt. Darüber hinaus können in SMASH Fermi-Impulse hinzugefügt werden, siehe Anhang A.2. Die Verteilung der Fermi-Impulse auf die Nukleonen erfolgt in SMASH folgendermaßen: Für jedes Nukleon werden seine Koordinaten (r, θ, φ) in die Woods-Saxon-Verteilung (6) eingesetzt, um die Teilchendichte am jeweiligen Ort zu bestimmen. Innerhalb der durch Gleichung (25) festgelegten Fermi-Kugel wird dann zufällig ein Punkt (p_x, p_y, p_z) ausgewählt, wodurch der Fermi-Impuls initialisiert wird [15].

Im Rahmen dieser Arbeit wird für die Fermi-Impulse die Option *frozen* verwendet. Sie stellt insofern eine Approximation dar, als dass die Fermi-Impulse lediglich für die Berechnung der Wechselwirkungen, nicht aber für die Propagation der Teilchen berücksichtigt werden. Diese Option ist sinnvoll, wenn wie hier ohne Potentiale gearbeitet wird, da ansonsten die Nukleonen eines Kerns auseinanderdriften.

Schließlich werden die Kerne noch im Ortsraum verschoben. Für diesen Schritt werden vereinfachend zwei sphärisch symmetrische Kerne als harte Kugeln mit

4 Methodik

4.1 Zeitpunkt der Berechnung der Exzentrizitäten

Selbstverständlich spielt es eine Rolle, zu welcher Zeit die Exzentrizitäten gemäß (1) und (2) bestimmt werden. Betrachtet werden nur Kollisionen zweier identischer Kerne. Die Auswertung erfolgt zum Zeitpunkt $t = T$, zu dem die Kerne gerade durcheinander durchgeflogen wären, wenn sie nicht wechselwirken würden [16]. Schwerionen sind allerdings keine scharf begrenzten Objekte, sodass zunächst definiert werden muss, wie die Ausdehnung eines Kerns zu verstehen ist, bevor überhaupt davon gesprochen werden kann, dass die Kerne sich gegenseitig passiert haben.

Wie in Abschnitt 3.2 beschrieben wurde, werden sphärisch symmetrische Kerne in SMASH so initialisiert, dass sie zur Zeit $t = 0$ die x -Achse berühren, wenn sie als Lorentz-kontrahierte Kugeln mit „effektivem Radius“ $r_{\text{eff}} \equiv r_0 + d$ vor der Kontraktion angesehen werden. Für kugelförmige Kerne nimmt die Woods-Saxon-Verteilung (6) die Form

$$\frac{dN}{d^3r}(r, \theta, \varphi) = \frac{\rho_0}{\exp\left(\frac{r-r_0}{d}\right) + 1} \equiv \frac{dN}{d^3r}(r) \quad (11)$$

an. Im Abstand $r = r_{\text{eff}}$ vom Zentrum beträgt die Dichte

$$\frac{dN}{d^3r}(r_{\text{eff}}) = \frac{\rho_0}{e + 1} \quad . \quad (12)$$

Die gedachten scharfen Grenzen des Kerns entsprechen also der Fläche im Raum, auf der die Teilchendichte den Wert $\rho_0/(e + 1)$ annimmt. Diese Idee wird nun auf deformierte Kerne übertragen. Offenbar muss dann der Exponent in Gleichung (6) eins betragen und es folgt

$$r_{\text{eff}}(\theta, \varphi) = r(\theta, \varphi) + d = r_0(1 + \beta_{20}Y_{20}(\theta, \varphi) + \beta_{40}Y_{40}(\theta, \varphi)) + d \equiv r_{\text{eff}}(\theta) \quad . \quad (13)$$

Da nun eine Vorschrift zur Behandlung der Ausdehnung eines deformierten Kerns definiert wurde, kann die Zeit T berechnet werden. Aufgrund der Symmetrie der beiden Kerne im Schwerpunktsystem gilt $r_{0,P} = r_{0,T} \equiv r_0$ und $d_P = d_T \equiv d$. Da im Schwerpunktsystem der Gesamtimpuls zu allen Zeiten null ist, bewegen sich die zwei Kerne mit entgegengesetzt gerichteten aber betragsmäßig gleichen Geschwindigkeiten $v_P = v_T \equiv v$ bzw. $\gamma_P = \gamma_T \equiv \gamma$ parallel zur z -Achse. Jeder Kern lege so im Zeitintervall $[0, T]$ eine Strecke s zurück. Aus der Definition des Lorentz-Faktors γ folgt $v = \frac{1}{\gamma} \sqrt{\gamma^2 - 1}$ und damit

$$T = \frac{s}{v} = \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 - 1}} s \quad . \quad (14)$$

Dieses Zwischenergebnis wurde mithilfe von [16] hergeleitet. Es gilt nun, die Strecke s explizit zu bestimmen.

In dieser Arbeit werden zwei verschiedene Situationen betrachtet: festgelegte oder zufällige Orientierungen der deformierten Kerne.

Festgelegte Orientierungen

Unter einer *tip-tip*-Kollision versteht man die Situation, dass die langen Achsen der kollidierenden Kerne parallel zur Strahlachse sind. Bei einer *body-body*-Kollision sind hingegen beide Achsen senkrecht zur Strahlachse und parallel zueinander [17]. Diese Szenarien sind als Grenzfälle zu verstehen, die experimentell nicht kontrolliert herbeigeführt werden können. Sie werden lediglich zur Illustration der Deformation am Beispiel von Ruthenium- und Uran-Kernen angeführt, sodass zur Vereinfachung nur der Fall $b = 0$ behandelt wird.

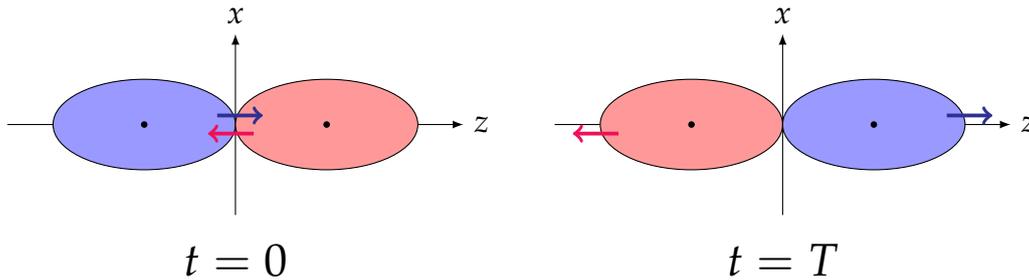


Abbildung 6: Schematische Darstellung einer *tip-tip*-Kollision zweier identischer deformierter Kerne im Schwerpunktsystem

Exemplarisch ist in Grafik 6 eine *tip-tip*-Kollision dargestellt. Die folgenden Überlegungen gelten jedoch auch für *body-body*-Kollisionen. Jeder Kern muss eine Strecke, die seiner eigenen Ausdehnung in z -Richtung entspricht, zurücklegen. Berücksichtigt man die Lorentz-Kontraktion der Kerne, ergibt sich

$$s = \frac{2r_{\text{eff}}(\theta_{t,b})}{\gamma} . \quad (15)$$

Dabei bezeichnet θ_t bzw. θ_b den Polarwinkel, bei dem *tip* bzw. *body* des Kerns liegt. Für eine *tip-tip*-Kollision ist θ_t und für eine *body-body*-Kollision θ_b zu wählen.

Der Lorentzfaktor γ kann leicht durch $\sqrt{s_{NN}}$ ausgedrückt werden. Jedes Nukleon besitzt im Schwerpunktsystem dieselbe Energie $E_N = \gamma m_N$. Die Schwerpunktsenergie pro Nukleonpaar lautet folglich $\sqrt{s_{NN}} = 2\gamma m_N$. Umgestellt ergibt

sich

$$\gamma = \frac{\sqrt{s_{NN}}}{2m_N} . \quad (16)$$

Einsetzen des Ausdrucks (15) in (14) liefert mit Gleichung (16)

$$T = \frac{4m_N}{\sqrt{(\sqrt{s_{NN}})^2 - 4m_N^2}} r_{\text{eff}}(\theta_{t,b}) . \quad (17)$$

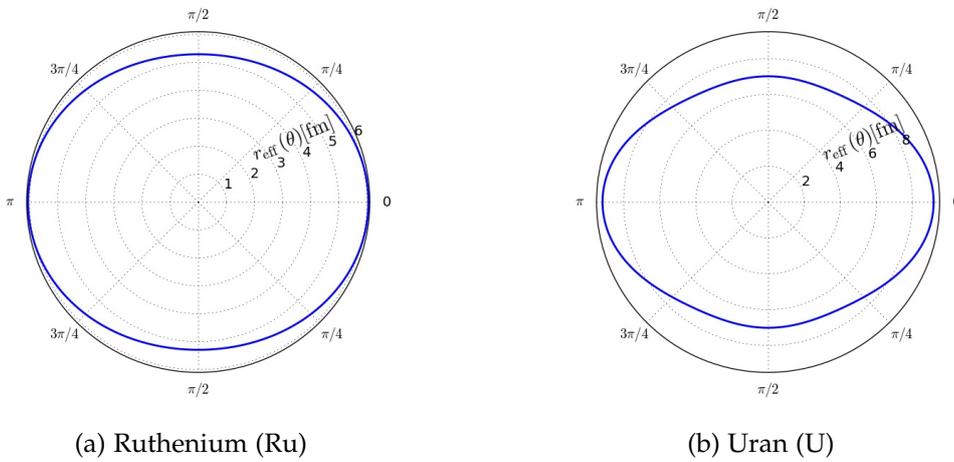


Abbildung 7: Effektiver Radius als Funktion des Polarwinkels θ für Ruthenium- und Uran-Kerne

In Abbildung 7 sind die effektiven Radien von Ruthenium- und Uran-Kernen in Abhängigkeit vom Polarwinkel θ aufgetragen. Verwendet wurden dafür die Werte aus Tabelle 1. Für beide Kerne kann offenbar $\theta_t = 0$ und $\theta_b = \pi/2$ gesetzt werden. Daraus ergibt sich auch sofort, wie die Kerne rotiert werden müssen: Für $\phi = \vartheta = 0$ finden *tip-tip*-Kollisionen statt, *body-body*-Kollisionen werden hingegen für die beiden Fälle $\phi = 0, \vartheta = \pi/2$ und $\phi = \vartheta = \pi/2$ realisiert.

Zufällige Orientierungen

Nimmt man an dieser Stelle zur Vereinfachung kugelförmige Kerne an, so erwartet man, dass die Strecke s für eine große Anzahl an simulierten Kollisionen im Mittel gleichermaßen unter- und überschätzt wird. Für zufällige Rotationen kann die Deformation bei der Bestimmung von s also vernachlässigt werden, so dass r_{eff} konstant ist. Der Stoßparameter soll jedoch in der folgenden Rechnung berücksichtigt werden.

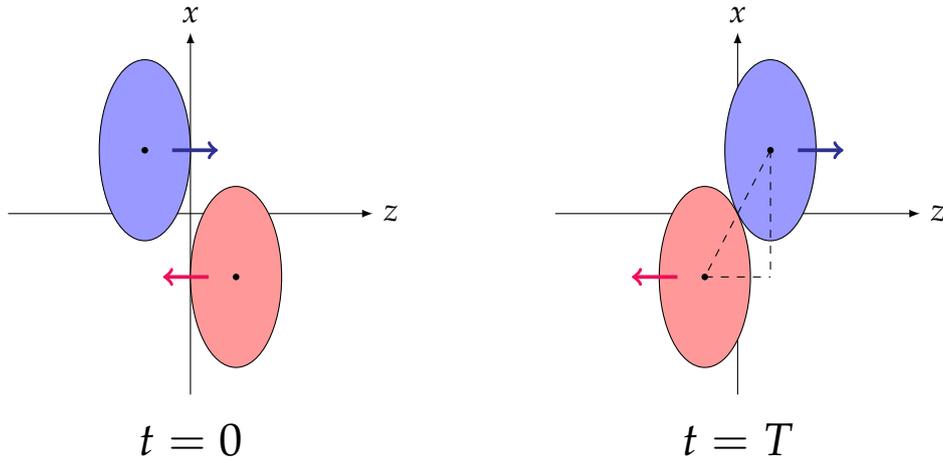


Abbildung 8: Schematische Darstellung einer Kollision zweier identischer kugelförmiger Kerne im Schwerpunktsystem. Die Kerne sind Lorentz-kontrahiert gezeichnet.

Anhand von Abbildung 8 wird zunächst klar, dass die Kerne nur durcheinander durchfliegen können, solange $b \in [0, 2r_{\text{eff}})$. Größere Stoßparameter werden daher im Folgenden ausgeschlossen. Der Mittelpunkt jedes Kerns muss ausgehend von $t = 0$ zunächst die x -Achse erreichen und dabei aufgrund der relativistischen Längenkontraktion die Strecke r_{eff}/γ zurücklegen. Danach müssen sich die Kerne noch so lange weiterbewegen, bis sie durcheinander durchgeflogen sind und sich nur noch berühren. Nicht-relativistisch wäre diese zweite Distanz für jeden Kern gegeben durch $\frac{1}{2}\sqrt{(2r_{\text{eff}})^2 - b^2}$ wie man sich mithilfe des Satzes des Pythagoras überlegen kann. Die Lorentz-Kontraktion verkürzt diese Länge um einen Faktor γ . Insgesamt ergibt sich also

$$s = \frac{r_{\text{eff}}}{\gamma} + \frac{\sqrt{4r_{\text{eff}}^2 - b^2}}{2\gamma} \quad (18)$$

und mit Gleichung (14) erhält man

$$T(b) = \frac{r_{\text{eff}} + \frac{1}{2}\sqrt{4r_{\text{eff}}^2 - b^2}}{\sqrt{\gamma^2 - 1}} \quad (19)$$

Setzt man Gleichung (16) in Ausdruck (19) ein, erhält man als Ergebnis

$$T(b) = \frac{2 \left(1 + \sqrt{1 - \left(\frac{b}{2r_{\text{eff}}} \right)^2} \right) m_N}{\sqrt{(\sqrt{s_{NN}})^2 - 4m_N^2}} r_{\text{eff}} \quad (20)$$

Abbildung 9 zeigt die Abhängigkeit der Zeit T vom Stoßparameter b für verschiedene Systeme. Generell zeigt sich, dass der Stoßparameter einen geringen

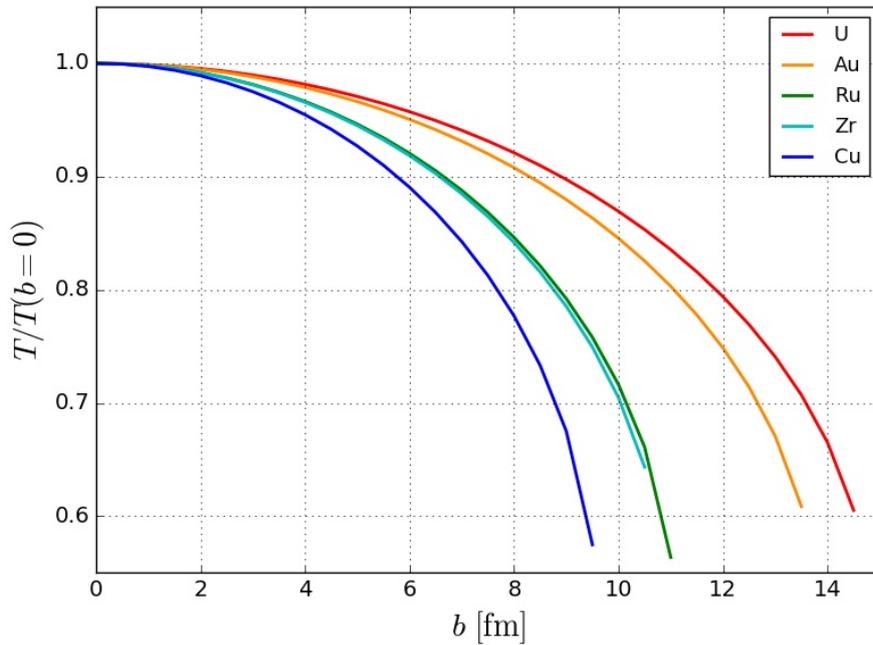


Abbildung 9: Verhältnis $T(b)/T(b=0)$ bei symmetrischen Kollisionen für fünf verschiedene Kerne. Die Kurven enden jeweils bei $b = 2r_{\text{eff}}$.

Einfluss hat, solange er klein gegenüber der Ausdehnung der jeweiligen Kerne ist. Mittlere und große Stoßparameter müssen jedoch in der Berechnung von T berücksichtigt werden, da $T(b)$ und $T(0)$ dann stark voneinander abweichen. In peripheren Kollisionen sinkt $T(b)$ sogar auf etwa 60 % gegenüber $T(0)$ ab.

4.2 Durchführung und Auswertung der Simulationen

Die durchgeführten Simulationsreihen unterscheiden sich in der Orientierung und Deformation der Kerne, der Schwerpunktsenergie, der Systemgröße sowie der Berücksichtigung von Fermi-Impulsen. Für jedes Szenario wurden für die Stoßparameter $\{0 \text{ fm}, 1 \text{ fm}, \dots, b_{\text{max}}\}$, $b_{\text{max}} < 2(r_0 + d)$, jeweils 2000 Simulationen gerechnet und die Daten zum Zeitpunkt T gemäß Gleichung (17) bzw. (20) ausgegeben. Die Beschränkung des Stoßparameters ist notwendig, da, wie in Abschnitt 2.3 erwähnt wurde, die Definitionen der Exzentrizitäten voraussetzen, dass in jeder Kollision mindestens zwei Partizipanten zu finden sind, was für zunehmende Stoßparameter immer unwahrscheinlicher wird. Gleichzeitig wird auch die Gültigkeit von Gleichung (20) sicherstellt, da sie an die Bedingung $b < 2r_{\text{eff}}$ geknüpft ist.

Für die Auswertung müssen aus den von SMASH produzierten Daten zunächst die Spektatoren herausgefiltert werden. In SMASH werden alle $2A$ initialisierten Nukleonen von 0 bis $2A - 1$ durchgezählt und mit einer entsprechenden ID

versehen. Jedem in der Kollision neu produzierten Teilchen wird dann eine ID größer als $2A - 1$ zugewiesen. Zudem wird für jedes Teilchen gezählt, wie viele Wechselwirkungen es gemäß dem Kollisionskriterium (4) erfährt. Spektatoren sind folglich in SMASH dadurch identifizierbar, dass ihre ID zwischen 0 und $2A - 1$ liegt und dass für sie keine Wechselwirkung gezählt wurde.

Aus den Koordinaten der verbleibenden Partizipanten werden dann für jeden Stoßparameter die arithmetischen Mittelwerte der Exzentrizitäten (1) bzw. (2) sowie die Fehlerintervalle $[\bar{\epsilon}_{rp,part} - \Delta\epsilon_{rp,part}, \bar{\epsilon}_{rp,part} + \Delta\epsilon_{rp,part}]$ nach den Definitionen aus Anhang A.3 berechnet. Falls weniger als zwei Partizipanten in einer Simulation existieren, wird sie verworfen, sodass in diesem Fall die für die Statistik relevante Anzahl an Wiederholungen N entsprechend kleiner als 2000 ist.

4.3 Limitierungen

Die berechneten Ergebnisse folgen aus dem effektiven Modell SMASH, das natürlich keine perfekte Abbildung der Realität liefern kann. Außerdem beruht SMASH auf der relativistischen Boltzmann-Gleichung, die, wie in Abschnitt 2.4 besprochen wurde, nur anwendbar ist, falls die Reichweite der Wechselwirkungen kleiner als der mittlere Abstand je zweier Teilchen ist. Gerade bei Schwerionenkollisionen hoher Energie ist das entstehende Medium jedoch so dicht, dass diese Bedingung u. U. nicht immer erfüllt ist. Darüber hinaus sind in SMASH viele in der Natur vorkommende Wechselwirkungsprozesse noch nicht implementiert, sodass der Kollisionsterm unvollständig ist. In dieser Arbeit wird ohne Potentiale und als Folge dessen nur mit der Näherung *frozen* für Fermi-Impulse gerechnet, was eine weitere Quelle systematischer Fehler darstellt.

Die Betrachtung der Kerne als Kugeln mit Radius r_{eff} ist eine willkürliche Festlegung. Man könnte schließlich stattdessen beispielsweise auch einen Radius $\tilde{r}_{eff}(\theta) \equiv r(\theta) + d/2$ definieren. Selbst nach der Festlegung von r_{eff} wurde aber eine Vereinfachung getroffen: Bei der Bestimmung der Zeit T für fest vorgegebene Rotationen in Abschnitt 4.1 wurde der Einfluss des Stoßparameters vernachlässigt. Dadurch ist die Vergleichbarkeit der entsprechenden Ergebnisse für verschiedene Stoßparameter eingeschränkt.

Außerdem muss geklärt werden, unter welchen Umständen ϵ_{rp} und ϵ_{part} überhaupt sinnvolle Definitionen sind. Die *reaction plane eccentricity* ist stark an das festgelegte Koordinatensystem gebunden. Für Simulationen stellt dies kein nennenswertes Problem dar, weil die x -Achse immer mit der Stoßparameterachse

zusammengelegt werden kann. Im Experiment ist diese vor einer Messung aber gar nicht bekannt. Deshalb ist ϵ_{rp} für ein starres Laborsystem nicht geeignet. Experimentell sinnvoller ist die *participant eccentricity*, da sie die tatsächliche Form des Überlapps repräsentiert.

5 Ergebnisse

5.1 Orientierung

In Abbildung 10 ist der Einfluss der Orientierung deformierter Kerne auf die Exzentrizitäten zu sehen. Allen Graphen der *reaction plane eccentricity* außer für $\phi = \vartheta = \pi/2$ bei Uran ist gemeinsam, dass sie zunächst kontinuierlich steigen und für große Stoßparameter zu kleineren Werten abknicken. Um dies zu erklären, muss berücksichtigt werden, dass es für steigende Stoßparameter immer weniger Partizipanten gibt. Der Überlapp zieht sich dann zunehmend zu einem Punkt zusammen, sodass keine der Koordinaten x und y gegenüber der anderen ausgezeichnet ist. Im Mittel erwartet man also eine gleichartige Verteilung der Partizipanten in x - und y -Richtung, sodass ϵ_{rp} im Grenzwert großer Stoßparameter gegen null strebt. Das Anwachsen der statistischen Fehler erklärt sich dadurch, dass bei großen Stoßparametern Kollisionen verworfen werden müssen, da sie weniger als zwei Partizipanten besitzen.

Bei einer zentralen *tip-tip*-Kollision ($\phi = \vartheta = 0$) ist ϵ_{rp} wie erwartet nahezu null, da die Elongation der Kerne nicht in der Transversalebene liegt. Werden die Kerne um $\vartheta = \pi/2$ rotiert, sind sie in y -Richtung gestreckt. Folglich ist es auch ihr Überlapp, was sich in vergleichsweise großen positiven Exzentrizitäten niederschlägt. Betragen beide Euler-Winkel $\pi/2$, ist die Elongation parallel zur Stoßparameterachse x . Für kleine Stoßparameter ist dann auch der Überlapp in x -Richtung elongiert, was in negativen *reaction plane eccentricities* resultiert, vgl. Abschnitt 2.3. Wenn der Stoßparameter größer wird, wird schließlich der Punkt erreicht, bei dem der Überlapp keine ausgezeichnete Achse mehr besitzt, was der Nullstelle von ϵ_{rp} entspricht. Sie fällt für Uran und Ruthenium in etwa mit dem Minimum von ϵ_{part} zusammen. Große Stoßparameter führen schließlich wie in den anderen Szenarien zu positiven Exzentrizitäten.

Auffällig ist, dass insbesondere bei Uran für $\phi = 0, \vartheta = \pi/2$ beide Exzentrizitäten für kleine Stoßparameter nahezu identisch sind. Gemäß Abschnitt 2.3 bedeutet dies, dass die Kovarianz von x und y fast vollständig verschwindet und somit die Partizipanten nur kaum in der Transversalebene gedreht sind. Im Fall $\phi = \vartheta = \pi/2$ driften die Exzentrizitäten besonders bei kleinen Stoßparametern weit auseinander, jedoch unterscheiden sie sich betragsmäßig nur sehr wenig. Das unterschiedliche Vorzeichen ergibt sich lediglich aus der Richtung der Elongation des Überlapps, sodass auch hier σ_{xy} klein ist und folglich die Partizipanten kaum in der Transversalebene gedreht sind. In zentralen *body-body*-Kollisionen spielen Fluktuationen offenbar keine große Rolle. Die fest vor-

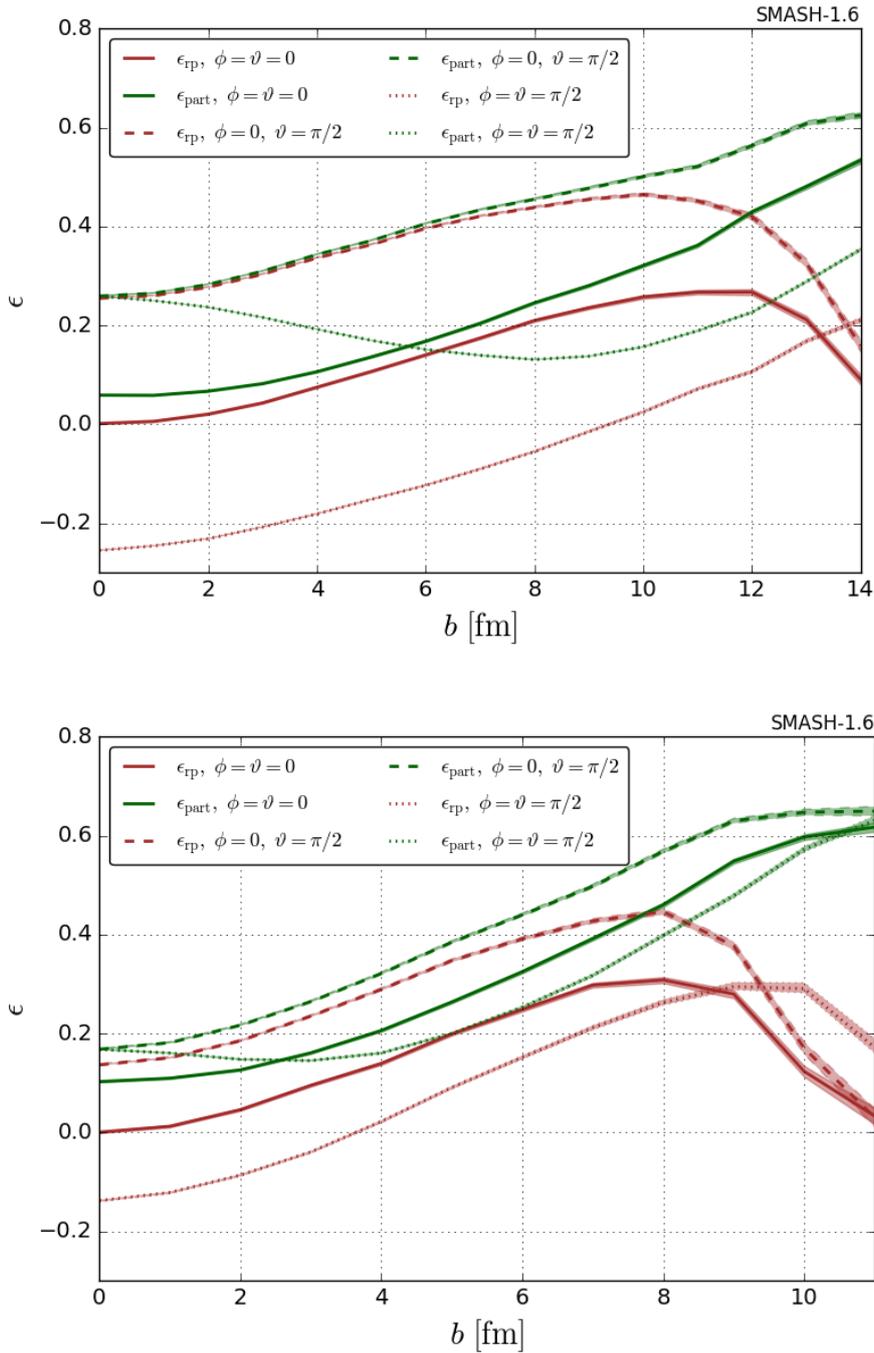


Abbildung 10: Dargestellt ist der Einfluss der Orientierung deformierter Kerne auf Exzentrizitäten. Durchgeführt wurden U-U- (oben) und Ru-Ru-Kollisionen (unten) bei $\sqrt{s_{NN}} = 7,7$ GeV mit der Option *frozen* für Fermi-Impulse. $\phi = \vartheta = 0$ entspricht einer *tip-tip*-Kollision, während $\phi = 0, \vartheta = \pi/2$ eine *body-body*-Kollision darstellt, bei der die Kerne in y -Richtung elongiert sind. Der Fall $\phi = \vartheta = \pi/2$ ist eine *body-body*-Kollision mit in x -Richtung gestreckten Kernen.

gegebene Orientierung der Kerne relativ zueinander dominiert die Form des Überlapps, sodass sich Fluktuationen kaum bemerkbar machen. Dies gilt insbe-

sondere für große Systeme wie U-U. Im kleineren System Ru-Ru ist die (betragsmäßige) Übereinstimmung der Exzentrizitäten in *body-body*-Kollisionen weniger stark ausgeprägt.

5.2 Deformation

Wie sich die Exzentrizitäten ändern, wenn die Deformation von Kernen „künstlich“ ausgeschaltet wird, ist in den Abbildungen 11 und 12 jeweils für zwei Energien dargestellt. Für zufällig rotierte Kerne, wie sie hier vorliegen, ist ϵ_{rp} in zentralen Kollisionen erwartungsgemäß null, da sich im Mittel die Effekte der verschiedenen Orientierungen gegenseitig aufheben. Dass die *participant eccentricity* monoton wächst, ist nicht überraschend: Je größer der Stoßparameter ist, desto stärker ist der Überlapp elongiert. Ein Abknicken wie bei ϵ_{rp} beobachtet man nicht, da ϵ_{part} die Exzentrizität stets maximiert und daher gegen eins strebt. Dass ϵ_{part} selbst bei zentralen Kollisionen nicht null ist, ist durch Fluktuationen der Teilchenkoordinaten erklärbar. Wäre die *participant eccentricity* nämlich annähernd null, würde das bedeuten, dass in einem Großteil der Kollisionen die Partizipanten in der Transversalebene nahezu perfekt kreisförmig verteilt sind, was sehr unwahrscheinlich ist.

Anhand der Grafik 11 für U-U-Kollisionen erkennt man, dass sich für beide Energien und nicht zu große Stoßparameter ϵ_{rp} und ϵ_{part} einander annähern, wenn die Deformation vernachlässigt wird. Dieser Effekt wird größtenteils von der *participant eccentricity* hervorgerufen, die vor allem in zentralen Kollisionen für nicht deformierte Kerne vergleichsweise klein ist. Mithilfe der bisherigen Erkenntnisse lässt sich schließen, dass die Partizipanten in zentralen Kollisionen nicht deformierter Kerne geringeren Fluktuationen unterworfen sind. Die grundsätzliche Beobachtung, dass sich ϵ_{rp} und ϵ_{part} bei mittleren Stoßparametern am ähnlichsten sind, bleibt auch ohne Deformation weiter bestehen. In diesem Bereich sind Fluktuationen also wenig sichtbar. Bei mittleren bis großen Stoßparametern führt die Vernachlässigung der Deformation zu einem leichten Anstieg der *reaction plane eccentricity*. Die *participant eccentricity* zeigt dieses Verhalten erst bei sehr großen Stoßparametern.

Beim Vergleich der Graphen in Abbildung 11 für verschiedene Energien fällt auf, dass alle Kurven bis circa $b = 3$ fm nahezu identisch sind. Erst bei größeren Stoßparametern erkennt man, dass alle Exzentrizitäten für höhere Energien ein wenig größer sind. Diese Beobachtungen decken sich mit den Ergebnissen in Grafik 1 aus [11], obwohl dort Gold- und Blei-Kerne verwendet wurden.

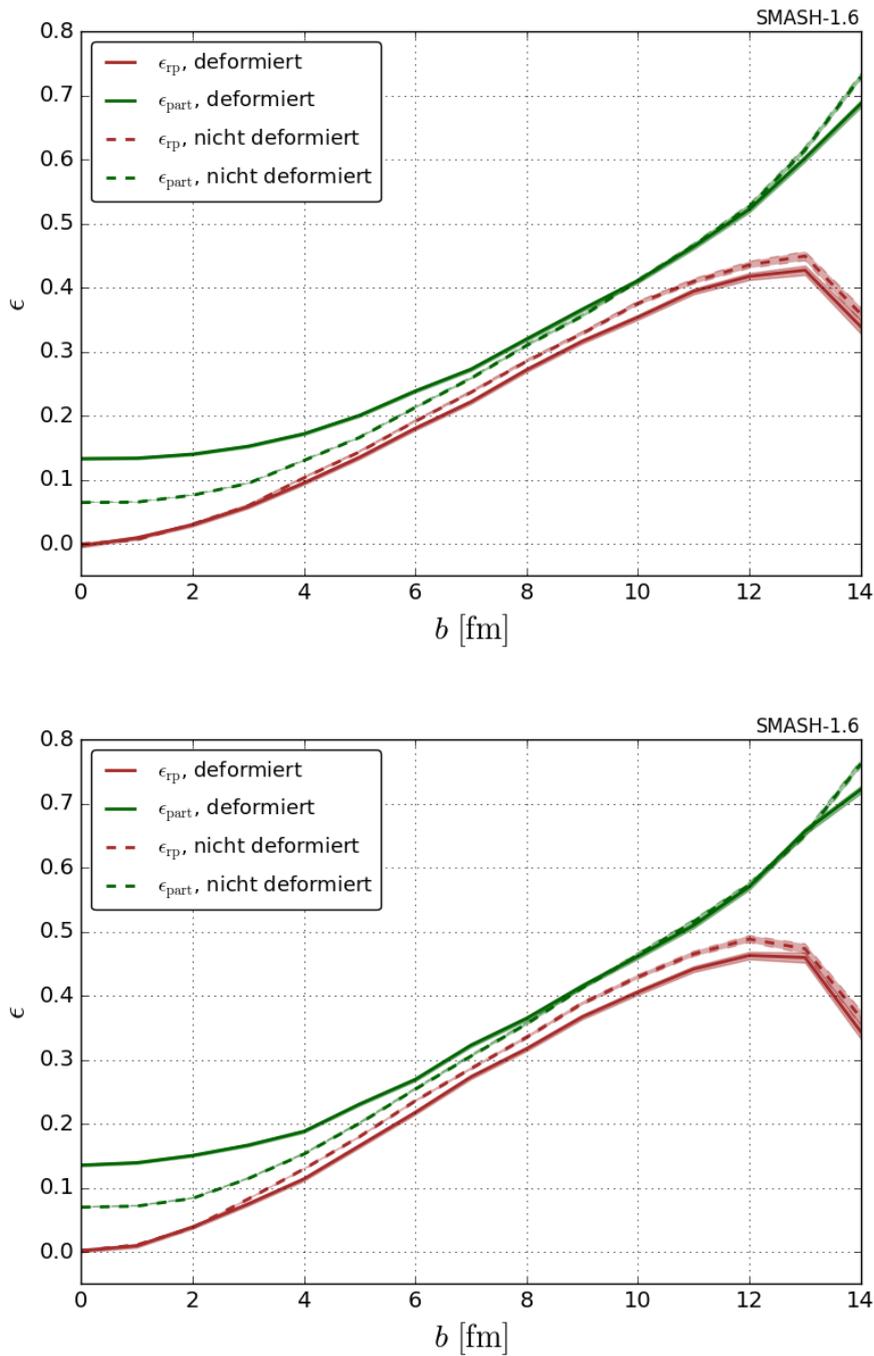


Abbildung 11: Zu sehen ist der Einfluss der Deformation von Uran-Kernen auf Exzentrizitäten für die Schwerpunktsenergien $\sqrt{s_{NN}} = 7,7$ GeV (oben) und $\sqrt{s_{NN}} = 19,6$ GeV (unten). Die Orientierung der Kerne ist zufällig und Fermi-Impulse sind mit der Option *frozen* berücksichtigt worden.

Grafik 12 vergleicht dieselben Aspekte wie Abbildung 11, jedoch für Kollisionen zweier Kupfer-Kerne. Es ist offensichtlich, dass der Einfluss von Deformation bei Kupfer deutlich kleiner als bei Uran ist. Dies liegt wohl in erster Linie daran, dass Kupfer weniger stark deformiert ist, vgl. Tabelle 1, sodass eine Abschal-

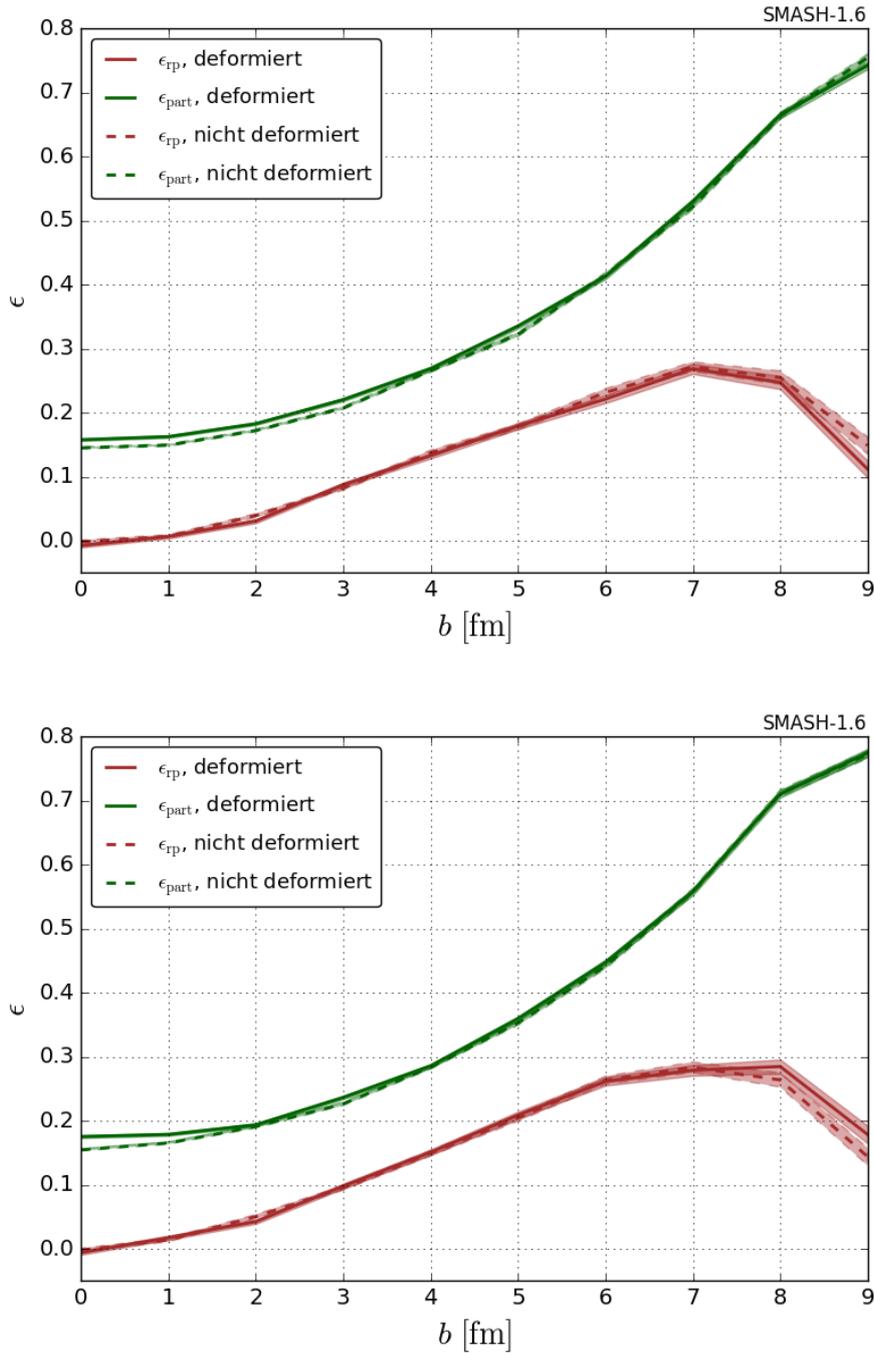


Abbildung 12: Gezeigt ist der Einfluss der Deformation von Kupfer-Kernen auf Exzentrizitäten für die Schwerpunktsenergien $\sqrt{s_{NN}} = 7,7$ GeV (oben) und $\sqrt{s_{NN}} = 19,6$ GeV (unten). Die Kerne sind zufällig orientiert und Fermi-Impulse mit der Option *frozen* berücksichtigt worden.

Die Deformation bei Cu-Cu-Kollisionen einen kleineren Effekt erzielt. Bei $\sqrt{s_{NN}} = 7,7$ GeV liegen die Kurven der *reaction plane eccentricities* für die meisten Stoßparameter fast genau aufeinander. Nur bei peripheren Kollisionen ist ϵ_{rp} ohne Deformation ein wenig größer, was auch bei Uran erkennbar ist. Die

participant eccentricities sind ebenfalls kaum von der Deformation von Kupfer beeinflusst. Bei kleinen Stoßparametern ist sie ohne Deformation etwas kleiner. Wie zuvor bei Uran lässt sich dies darauf zurückführen, dass deformierte Kerne offenbar größeren Fluktuationen unterworfen sind. Bei $\sqrt{s_{NN}} = 19,6$ GeV sind die Exzentrizitäten insgesamt ein wenig größer, aber alle Abweichungen der Kurven mit bzw. ohne Deformation verlaufen genauso wie bei niedrigerer Energie mit der Ausnahme, dass die *reaction plane eccentricity* bei großen Stoßparametern durch fehlende Deformation etwas gesenkt wird.

5.3 Fermi-Impulse

Die Graphen in Abbildung 13 zeigen für zwei verschiedene Systemgrößen die entstehenden Unterschiede in den Exzentrizitäten auf, wenn Fermi-Impulse berücksichtigt oder ignoriert werden. Für Cu-Cu-Kollisionen liegen die Kurven für die Exzentrizitäten mit und ohne Verwendung von Fermi-Impulsen fast aufeinander. Die *participant eccentricity* besitzt bei $b = 7$ fm eine minimale Abweichung nach oben, wenn Fermi-Impulse nicht in Betracht gezogen werden. Der einzig signifikante Unterschied besteht in ϵ_{rp} für periphere Kollisionen. Mit Fermi-Impulsen liegt diese Kurve etwas unter derjenigen ohne Fermi-Impulse. Dies spiegelt sich in der Kurve für die *participant eccentricity* nicht wider. Die Beobachtung ist also nur darauf zurückzuführen, dass der Überlapp der Kerne mit Fermi-Impulsen stärker in der Transversalebene rotiert ist. Dies ist plausibel, da diese zusätzlichen Impulse das Potential besitzen, die ursprünglich vorhandene Geometrie und Symmetrie des Systems „aufzuweichen“.

Für Kollisionen zweier Gold-Kerne stimmen die Kurven ohne bzw. mit Berücksichtigung von Fermi-Impulsen noch besser überein als bei Cu-Cu-Kollisionen. Der kleine Unterschied in den *participant eccentricities*, wie er bei Kupfer beobachtet wurde, ist bei Gold kaum erkennbar und liegt im Rahmen des Fehlers. Die Differenzen in den *reaction plane eccentricities* sind kleiner geworden und kaum signifikant. Insgesamt lässt sich schließen, dass Fermi-Impulse bei der Betrachtung von Exzentrizitäten nur für kleine Systeme oder deutlich geringere Energien relevant sind.

5.4 Isobare

Zuletzt werden in Abbildung 14 die Exzentrizitäten der Isobaren Ruthenium und Zirconium für zwei verschiedene Schwerpunktsenergien verglichen. In Kol-

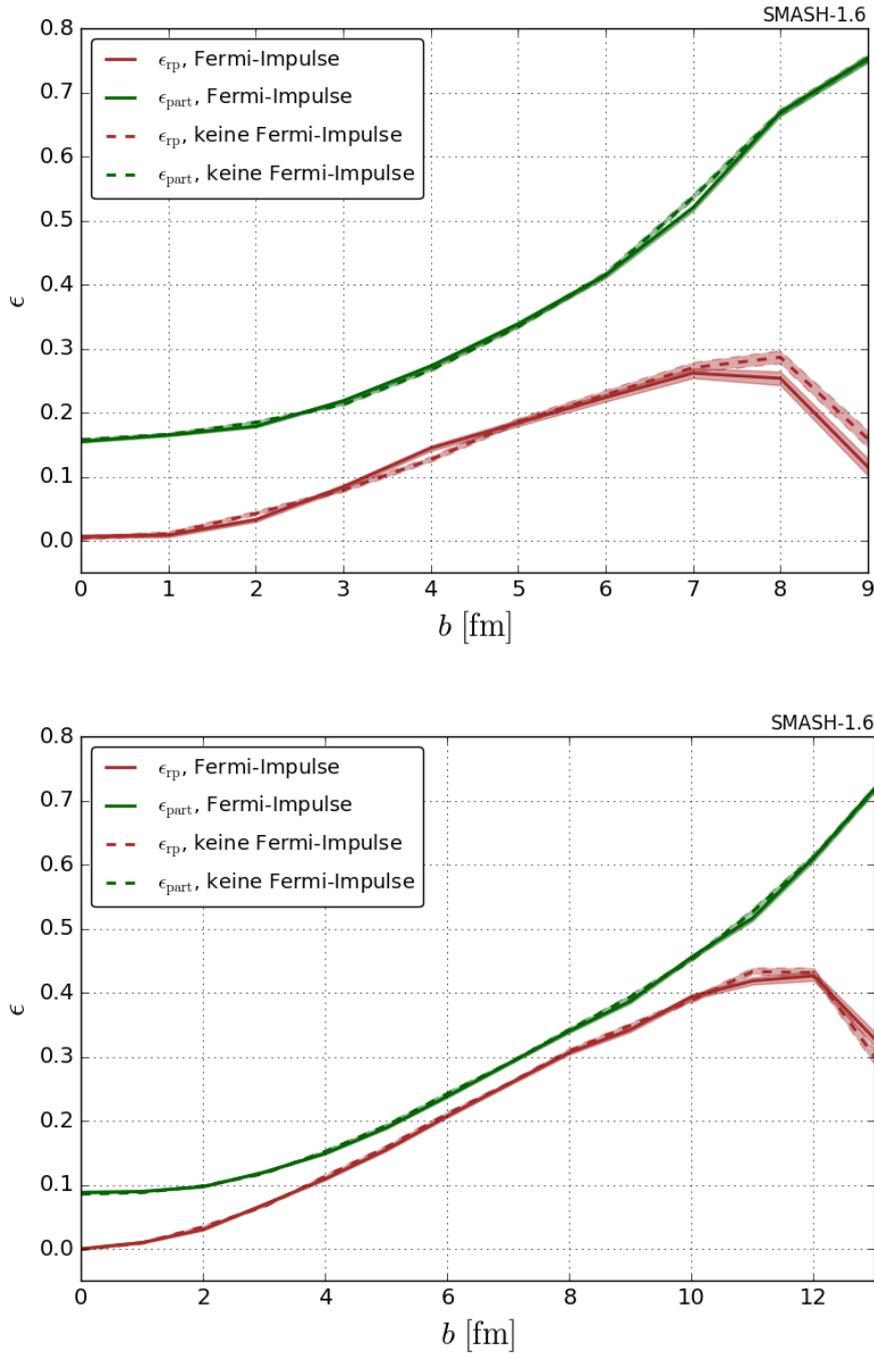


Abbildung 13: Es wird der Einfluss von Fermi-Impulsen auf Exzentrizitäten in Cu-Cu- (oben) und Au-Au-Kollisionen (unten) dargestellt. Im Fall von Fermi-Impulsen sind diese mit der Option *frozen* realisiert worden. Alle Kerne sind zufällig orientiert und die Schwerpunktsenergie beträgt $\sqrt{s_{NN}} = 7,7$ GeV.

lisionen mit $\sqrt{s_{NN}} = 7,7$ GeV zeichnet sich nur in der *participant eccentricity* und nur für zentrale Kollisionen ein bedeutender Unterschied ab. Wie in Abschnitt 5.2 ausgeführt wurde, ist das deutliche Nichtverschwinden von ϵ_{part} für $b \approx 0$ auf Fluktuationen zurückzuführen. Es stellt sich also heraus, dass der

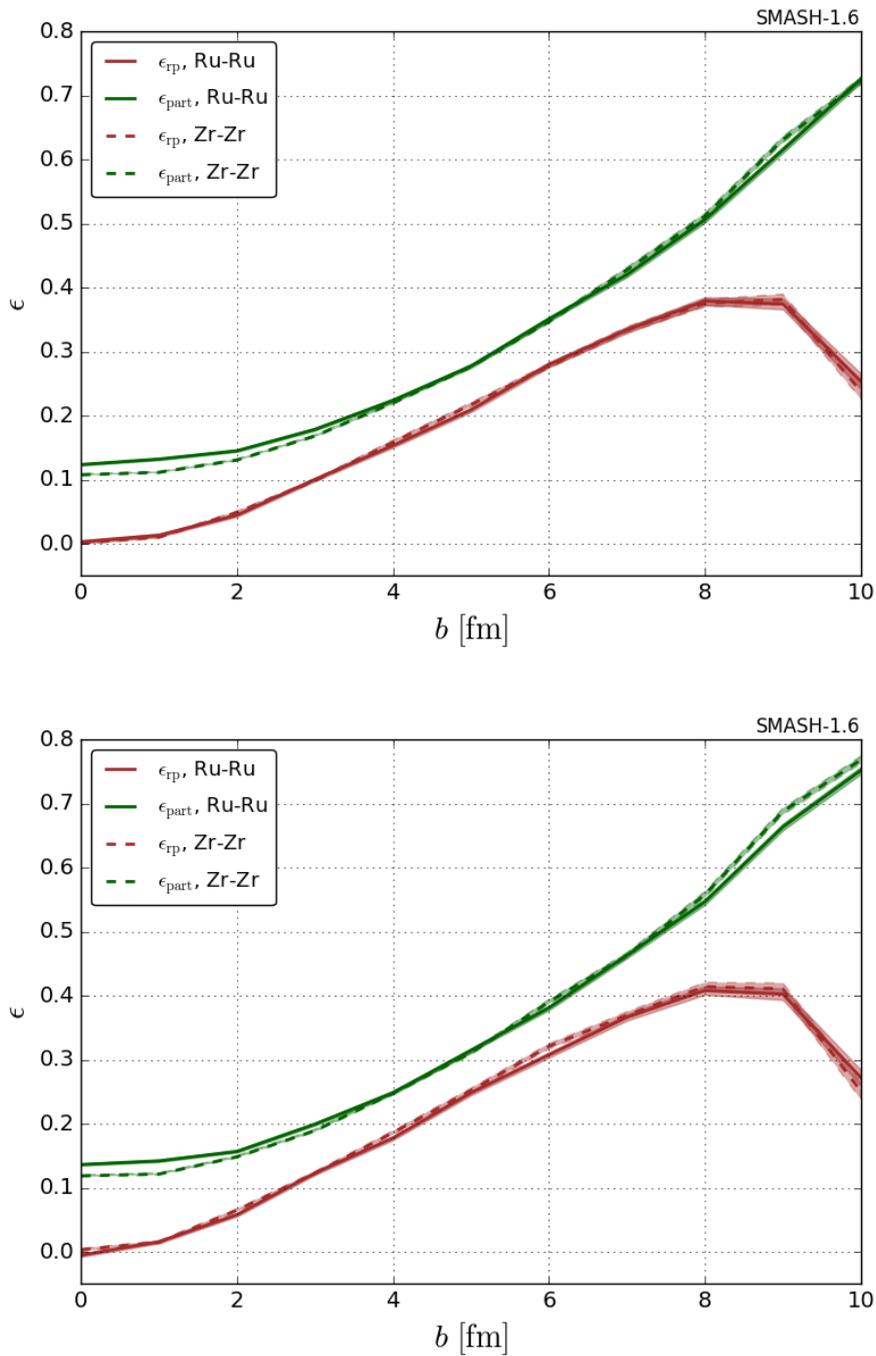


Abbildung 14: Dargestellt ist ein Vergleich der Exzentrizitäten in Ru-Ru- und Zr-Zr-Kollisionen für die Energien $\sqrt{s_{NN}} = 7,7$ GeV (oben) und $\sqrt{s_{NN}} = 19,6$ GeV (unten). Die Orientierung der Kerne ist zufällig und die Nukleonen tragen Fermi-Impulse gemäß der Option *frozen*.

deformierte Ruthenium-Kern stärkeren Fluktuationen unterworfen ist als der kugelförmige Zirkonium-Kern. Dies ist in völliger Übereinstimmung mit den Ergebnissen aus Sektion 5.2. Für $b = 9$ fm weichen die *participant eccentricities* minimal voneinander ab, aber dieser Effekt ist unter Berücksichtigung der Feh-

ler kaum nennenswert. Die Graphen der *reaction plane eccentricities* beider Isobare liegen besonders genau aufeinander.

Die Kurven für $\sqrt{s_{NN}} = 19,6$ GeV weisen dieselben Merkmale auf wie diejenigen für die niedrigere Energie. Man erkennt jedoch, dass die Differenz von ϵ_{part} für $b = 9$ fm womöglich doch systematischer Natur ist. Auch für $b = 10$ fm ist jetzt ein geringer Unterschied bemerkbar. Dass ϵ_{part} in peripheren Kollisionen für nicht deformierte Kerne größer als für deformierte ist, ist auch in Abbildung 11 sichtbar. Da Ruthenium gegenüber Uran jedoch nur schwach deformiert ist, vgl. Grafik 7, ist die Abweichung der *participant eccentricities* in Abbildung 14 relativ klein.

Die Isobaren Ruthenium und Zirconium sind also trotz ihrer unterschiedlichen Formen anhand von Exzentrizitäten nahezu ununterscheidbar, es sei denn man betrachtet ausschließlich zentrale oder periphere Kollision bei höherer Energie, was allerdings experimentell nicht umsetzbar ist.

6 Zusammenfassung und Ausblick

Für die vorliegende Arbeit wurden symmetrische Kollisionen von Kupfer-, Zirkonium-, Ruthenium-, Gold- und Uran-Kernen mithilfe eines relativistischen hadronischen Transportmodells simuliert. Zwei verschiedene Exzentrizitäten wurden in Bezug auf ihre Abhängigkeiten von der Orientierung und Deformation der Kerne, der Schwerpunktsenergie und der Berücksichtigung von Fermi-Impulsen untersucht. Es hat sich herausgestellt, dass die Orientierung deformierter Kerne einen wesentlichen Einfluss auf beide Exzentrizitäten hat, was insbesondere für eine geringe Anzahl an Kollisionen relevant ist. Besonders bei zentralen Kollisionen zeigt sich, dass stark deformierte Kerne größere Fluktuationen aufweisen als kugelförmige. Fermi-Impulse manifestieren sich in den Exzentrizitäten nur bei kleinen Systemen und die Kerne Ruthenium und Zirkonium zeigen in ihren Exzentrizitäten keine signifikanten Unterschiede auf.

Die Exzentrizitäten sind nur Bruchteile der benötigten Daten, um Aussagen über das in Schwerionenkollisionen produzierte Medium treffen zu können, denn erst aus der Transformation von Exzentrizitäten zu *flow* lassen sich die gesuchten Eigenschaften extrahieren. Es ist also nötig, speziell für die hier untersuchten Systeme experimentell den *flow* zu messen, um ihn mit den berechneten Exzentrizitäten in Verbindung zu bringen. Schließlich müssen die derart gewonnenen Eigenschaften des stark wechselwirkenden Mediums in weiteren Experimenten überprüft werden.

Literaturverzeichnis

- [1] Owe Philipsen. „Einführung“. In: *Quantenfeldtheorie und das Standardmodell der Teilchenphysik: Eine Einführung*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2018, S. 1–9. ISBN: 978-3-662-57820-9. DOI: 10.1007/978-3-662-57820-9_1. URL: https://doi.org/10.1007/978-3-662-57820-9_1.
- [2] Barbara V. Jacak und Berndt Müller. „The Exploration of Hot Nuclear Matter“. In: *Science* 337.6092 (2012), S. 310–314. ISSN: 0036-8075. DOI: 10.1126/science.1215901. eprint: <https://science.sciencemag.org/content/337/6092/310.full.pdf>. URL: <https://science.sciencemag.org/content/337/6092/310>.
- [3] *Brookhaven National Laboratory: Supercomputing the Transition from Ordinary to Extraordinary Forms of Matter*. <https://www.bnl.gov/newsroom/news.php?a=24281>. Zuletzt abgerufen am 16.09.2019.
- [4] *Brookhaven National Laboratory: The Physics of RHIC*. <https://www.bnl.gov/rhic/physics.asp>. Zuletzt abgerufen am 27.09.2019.
- [5] *CERN und LHC: Der LHC*. https://www.weltmaschine.de/cern_und_lhc/lhc/. Zuletzt abgerufen am 27.09.2019.
- [6] J. Weil u. a. „Particle production and equilibrium properties within a new hadron transport approach for heavy-ion collisions“. In: *Phys. Rev. C* 94.5 (2016), S. 054905. DOI: 10.1103/PhysRevC.94.054905. arXiv: 1606.06642 [nucl-th].
- [7] Q. Y. Shou u. a. „Parameterization of Deformed Nuclei for Glauber Modeling in Relativistic Heavy Ion Collisions“. In: *Phys. Lett. B* 749 (2015), S. 215–220. DOI: 10.1016/j.physletb.2015.07.078. arXiv: 1409.8375 [nucl-th].
- [8] Lucas, Renée. „Nuclear shapes“. In: *Europhysics News* 32.1 (2001), S. 5–8. DOI: 10.1051/epn:2001101. URL: <https://doi.org/10.1051/epn:2001101>.
- [9] David Griffiths. *Introduction to elementary particles*. John Wiley & Sons, Inc., 1987. ISBN: 0-471-60386-4.
- [10] Paul Romatschke und Ulrike Romatschke. *Relativistic Fluid Dynamics In and Out of Equilibrium*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 2019. ISBN: 9781108483681, 9781108750028. DOI: 10.1017/9781108651998. arXiv: 1712.05815 [nucl-th]. URL: <https://www.cambridge.org/academic/subjects/physics/theoretical-physics-and-mathematical-physics/relativistic-fluid-dynamics-and-out-equilibrium-and-applications-relativistic-nuclear-%5C-collisions?format=HB&isbn=9781108483681>.

- [11] Hannah Petersen und Marcus Bleicher. „Eccentricity fluctuations in an integrated hybrid approach: Influence on elliptic flow“. In: *Phys. Rev. C* 81 (2010), S. 044906. DOI: [10.1103/PhysRevC.81.044906](https://doi.org/10.1103/PhysRevC.81.044906). arXiv: [1002.1003](https://arxiv.org/abs/1002.1003) [nucl-th].
- [12] Sergei A. Voloshin u. a. „Elliptic flow in the Gaussian model of eccentricity fluctuations“. In: *Phys. Lett. B* 659 (2008), S. 537–541. DOI: [10.1016/j.physletb.2007.11.043](https://doi.org/10.1016/j.physletb.2007.11.043). arXiv: [0708.0800](https://arxiv.org/abs/0708.0800) [nucl-th].
- [13] Henning Højgaard Jense Henrik Smith. *Transport phenomena*. Oxford: Clarendon Press, 1989, S. 1. ISBN: 0198519850.
- [14] Dimitrij A. Varšalovič, Anatolij N. Moskalev und Valerij K Chersonskij. *Quantum theory of angular momentum*. World Scientific Publishing Co Pte Ltd., 1988.
- [15] SMASH auf GitHub. <https://github.com/smash-transport/smash>. Zuletzt abgerufen am 27.09.2019.
- [16] Damjan Mitrovic. „Nukleon-Nukleon Korrelationen in einem hadronischen Transportmodell“. Bachelorarbeit. Institut für Theoretische Physik Frankfurt am Main, 2018.
- [17] Andy Goldschmidt u. a. „Collision Geometry and Flow in Uranium + Uranium Collisions“. In: *Proceedings, 10th Workshop on Particle Correlations and Femtoscopy (WPCF 2014): Gyöngyös, Hungary, August 25-29, 2014*. 2015. arXiv: [1502.00603](https://arxiv.org/abs/1502.00603) [nucl-th].
- [18] „Teilchenerzeugung in e+e- - Kollisionen“. In: *Teilchen und Kerne: Eine Einführung in die physikalischen Konzepte*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2009, S. 119–133. ISBN: 978-3-540-68080-2. DOI: [10.1007/978-3-540-68080-2_9](https://doi.org/10.1007/978-3-540-68080-2_9). URL: https://doi.org/10.1007/978-3-540-68080-2_9.
- [19] Torsten Fließbach. „Spezielle Systeme“. In: *Statistische Physik: Lehrbuch zur Theoretischen Physik IV*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2018, S. 219–308. ISBN: 978-3-662-58033-2. DOI: [10.1007/978-3-662-58033-2_6](https://doi.org/10.1007/978-3-662-58033-2_6). URL: https://doi.org/10.1007/978-3-662-58033-2_6.
- [20] Marek Gierlinski. „Statistical estimators“. In: *Understanding Statistical Error: A Primer for Biologists*. Chicester : John Wiley & Sons, 2015, S. 65–90. ISBN: 9781119106890, 9781119106913.

A Anhang

A.1 Schwerpunktsenergie

Betrachtet wird ein System aus zwei Teilchen, die sich im Minkowski-Raum mit den 4-Impulsen p_1 und p_2 bewegen. Die Mandelstam-Variable s ist definiert als [18]

$$s = (p_1 + p_2)^2 = (p_1 + p_2)^\mu (p_1 + p_2)_\mu \quad . \quad (21)$$

Sie ist invariant unter Lorentz-Transformationen. Man kann zeigen, dass s im Schwerpunktsystem mit dem Quadrat der Gesamtenergie übereinstimmt. Daher wird \sqrt{s} oft als Schwerpunktsenergie bezeichnet. Diese Definition lässt sich auch auf Systeme von mehr als zwei Teilchen verallgemeinern.

Oft wird anstelle von \sqrt{s} die Schwerpunktsenergie pro Nukleonpaar $\sqrt{s_{NN}}$ verwendet. Für den Fall zweier identischer Kerne mit Massenzahl A besteht der Zusammenhang

$$\sqrt{s_{NN}} = \frac{\sqrt{s}}{A} \quad . \quad (22)$$

A.2 Fermi-Impulse

Schwerionen bestehen aus Nukleonen, die mit Spin $s = 1/2$ zur Klasse der Fermionen gehören und folglich dem Pauli-Prinzip unterliegen. Diese Tatsache führt dazu, dass nicht alle Nukleonen einen Zustand mit verschwindendem Impuls besetzen können. Die daraus resultierenden Impulse bezeichnet man als Fermi-Impulse. Im Folgenden wird aus der Quantenstatistik ein Ausdruck für ihren maximalen Betrag hergeleitet.

Die Besetzung der verfügbaren Energiezustände durch Fermionen in Abhängigkeit von der Temperatur wird durch die Fermi-Dirac-Verteilung beschrieben. Für tiefe Temperaturen, $T \rightarrow 0$, geht diese in eine Stufenfunktion über, sodass nur Zustände bis zu einer bestimmten Energie ϵ_F , der Fermi-Energie, besetzt sind. Die Fermi-Impulse der Nukleonen werden im Ruhesystem des Kerns berechnet, sodass sie in diesem Bezugssystem als nicht-relativistisch genähert werden können. Dann lautet die Dispersionsrelation der Nukleonen unter Vernachlässigung von Potentialen

$$\epsilon_p = \frac{\vec{p}^2}{2m_N} \quad (23)$$

mit der Energie ϵ_p , dem Impuls \vec{p} und der Masse m_N . Über Gleichung (23) lässt sich die Fermi-Energie direkt in einen Impuls $p_F = |\vec{p}_F| = \sqrt{2m_N\epsilon_F}$ übersetzen. Im Impulsraum sind also alle Zustände innerhalb einer Kugel mit Radius p_F , der Fermi-Kugel, besetzt. Beschränkt man die Nukleonen auf ein Volumen V im Ortsraum und fordert periodische Randbedingungen, erhält man quantisierte Impulse. Aufgrund der Spin-Entartung nehmen dann $2s + 1 = 2$ Zustände im Impulsraum ein Volumen $(2\pi)^3/V$ ein. Liegen N Nukleonen vor, können sie im Impulsraum nach dem Prinzip „Anzahl ist gleich Anzahldichte mal Volumen“ abgezählt werden:

$$N = \frac{2V}{(2\pi)^3} \frac{4}{3} \pi p_F^3 \quad (24)$$

So erhält man den gesuchten Ausdruck

$$p_F = (3\pi^2 n)^{1/3} \quad (25)$$

in Abhängigkeit von der Teilchendichte $n = N/V$ im Ortsraum. [19]

A.3 Statistische Größen

Für Messungen $\{x_k \mid k = 1, \dots, N\}$ einer Observablen x definiert man die folgenden Größen. [20]

- Arithmetisches Mittel:

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k \quad , \quad N \geq 1 \quad (26)$$

- Standardabweichung der Einzelmessung:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^N (x_k - \bar{x})^2} \quad , \quad N \geq 2 \quad (27)$$

- Standardabweichung des Mittelwerts:

$$\Delta x = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{k=1}^N (x_k - \bar{x})^2} \quad , \quad N \geq 2 \quad (28)$$

B Danksagungen

Mein besonderer Dank gilt Prof. Dr. Hannah Elfner dafür, dass sie mich in ihre Arbeitsgruppe aufgenommen und mir damit die Möglichkeit gegeben hat, meinen Blick auf die theoretische Physik zu erweitern. Ich habe im vergangenen Semester eine Menge gelernt und das verdanke ich nicht zuletzt auch ihrer ständigen Hilfsbereitschaft.

Ebenfalls bedanken möchte ich mich bei meinen Betreuern Anna Schäfer und Jan Hammelmann. Sie haben mir während meines Lern- und Arbeitsprozesses unzählige Fragen beantwortet und sich viel Zeit genommen, um Unklarheiten aus der Welt zu schaffen. Anna Schäfer danke ich nochmal speziell dafür, dass sie mir beim Programmieren in C++ viel Hilfestellung geleistet und für meine Arbeit neue Funktionen in SMASH implementiert hat.

Darüber hinaus bin ich insbesondere Damjan Mitrovic, Vinzent Steinberg und Justin Mohs für ihre Unterstützung und die Beantwortung meiner Fragen sehr dankbar, aber letztendlich hat jeder Einzelne in der Arbeitsgruppe durch seine Beiträge zu meinen Präsentationen im Arbeitsgruppenseminar zum Gelingen meines Bachelorprojektes beigetragen. Ich bedanke mich für die wertvollen Erfahrungen, die ich in den vergangenen Monaten machen durfte.

Abschließend möchte ich meinen Dank auch an meine Freunde und meine Familie richten. Jeder hat seinen Teil dazu beigesteuert, dass ich nun dort stehe, wo ich bin, und dass ich auf dem Weg dorthin viele tolle Momente erleben durfte.

C Eigenständigkeitserklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die Arbeit selbstständig und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Quellen und Hilfsmittel verfasst habe. Alle Stellen der Arbeit, die wörtlich oder sinngemäß aus Veröffentlichungen oder aus anderen fremden Texten entnommen wurden, sind von mir als solche kenntlich gemacht worden. Ferner erkläre ich, dass die Arbeit nicht - auch nicht auszugsweise - für eine andere Prüfung verwendet wurde.

Frankfurt am Main, den 30. September 2019

Lukas Prinz